2024年　東大数学　文系第3問 ①

(1)

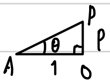
Point 座標上で角度を扱う問題

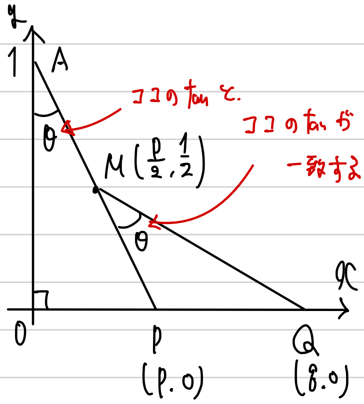
使える道具は4つ
① tan の加法定理
② ベクトルの内積
③ 図形的な考察
④ 複素数平面

解法1-1 tanθの利用(愚直ver)

△AOPについて

$\tan\theta = \frac{p}{1} = p$

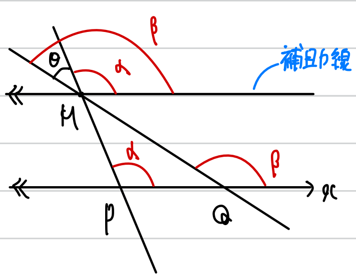




直線MP, MQが
x軸正方向となす角を
それぞれ α, β とする。

注 tanを使うときは、角の大小に注意

左図より $\theta = \beta - \alpha$



直線MPの傾きは

$$\frac{0-\frac{1}{2}}{p-\frac{p}{2}} = -\frac{1}{p}$$

直線MQの傾きは

$$\frac{0-\frac{1}{2}}{q-\frac{p}{2}} = -\frac{1}{2q-p}$$ なので、

$$\begin{cases} \tan\alpha = -\frac{1}{p} \\ \tan\beta = -\frac{1}{2q-p} \end{cases}$$

$$\tan\theta = \tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\beta\cdot\tan\alpha} = \frac{-\frac{1}{2q-p} - \left(-\frac{1}{p}\right)}{1+\left(-\frac{1}{2q-p}\right)\cdot\left(-\frac{1}{p}\right)}$$

$= \cdots\cdots$

$$= \frac{2q-2p}{p(2q-p)+1}$$

これで2種類のtanθが得られた!!

よって

$$p = \frac{2q-2p}{p(2q-p)+1}$$

$$\therefore\ q = \frac{p^3-3p}{2(p^2-1)}$$

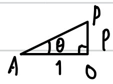
計算memo

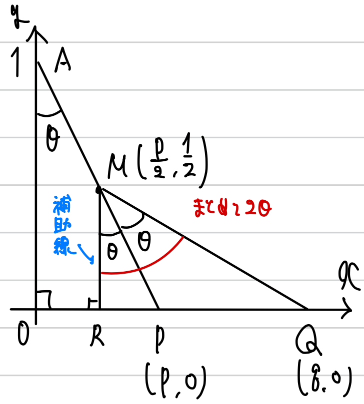
$$p^2(2q-p)+p = 2q-2p$$
$$(2p^2-2)q = p^3-3p$$
$$q = \frac{p^3-3p}{2(p^2-1)}$$

解法1-2 tanθの利用(工夫でカンタンver)

△AOPについて

$\tan\theta = \frac{p}{1} = p$

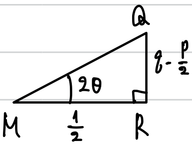




△MRQについて

$$\tan 2\theta = \frac{q-\frac{p}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$= 2q - p$



工夫したことで、2式目がとてもカンタンに得られた!

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$ に代入し、

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$ に $\alpha=\beta=\theta$ を代入

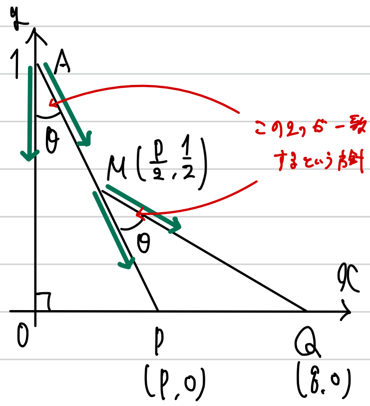
$$2q-p = \frac{2p}{1-p^2}$$

$$\therefore\ q = \frac{1}{2}\left(p + \frac{2p}{1-p^2}\right)$$

解法2 ベクトルの内積の利用

$\overrightarrow{AO} = (0, -1)$　$\overrightarrow{AM} = \left(\frac{p}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{MP} = \left(\frac{p}{2}, -\frac{1}{2}\right)$　$\overrightarrow{MQ} = \left(q-\frac{p}{2}, -\frac{1}{2}\right)$



$\overrightarrow{AO}$と$\overrightarrow{AM}$について、

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AM}|} = \frac{0+(-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{1\times\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}}$$

$= \cdots\cdots$

$$= \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$$

2024年　東大数学　文系第3問 ②

$\overrightarrow{MP}$ と $\overrightarrow{MQ}$ について、

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}}{|\overrightarrow{MP}||\overrightarrow{MQ}|} \qquad \overrightarrow{MP}=\left(\frac{p}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad \overrightarrow{MQ}=\left(q-\frac{p}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\frac{p}{2}\left(q-\frac{p}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\times\sqrt{\left(q-\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$= \cdots\cdots$$

$$= \frac{p(2q-1)+1}{2\sqrt{p^2+1}\times\sqrt{(2q-p)^2+1}}$$

よって

$$\frac{1}{\cancel{\sqrt{p^2+1}}} = \frac{p(2q-1)+1}{2\cancel{\sqrt{p^2+1}}\times\sqrt{(2q-p)^2+1}}$$

2乗

$$4\{(2q-p)^2+1\} = \{p(2q-1)+1\}^2$$

このあと、激しい計算なも挫折…。

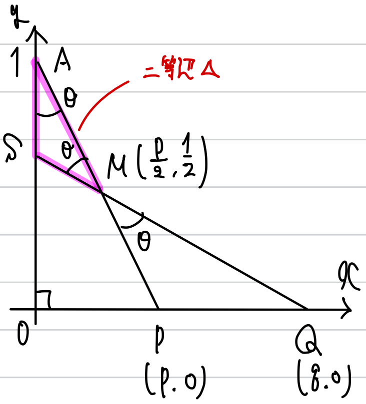
(注) ベクトルの内積を使う場合は
√ や2乗の計算が登場するため
計算量が多くなります。
今回は複雑になりすぎて、答えに
到達しませんでした。
(私の計算ミスの可能性もあります。)

解法3　図形的な考察

MQを延長して y軸と交わる
点をSとすると、

△ASMは二等辺三角形
となる。

AS=SM から、pとqの関係
を求めたいので、まずSの座標を
求める。



※ AS=SM 以外にも、二等辺△の
性質を利用した攻め方があるが、
AS=SM が一番カンタンだと思たので、コレを載せます。
興味のある人は、他のもチャレンジ。

直線MQは

$$y = \frac{0-\frac{1}{2}}{q-\frac{p}{2}}(x-q)$$

$$y = \frac{-1}{2q-p}x + \frac{q}{2q-p}$$ y切片がS

よって $S\left(0, \frac{q}{2q-p}\right)$

$$AS = 1-\frac{q}{2q-p}$$

$$SM = \sqrt{\left(\frac{p}{2}-0\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{q}{2q-p}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{p^2}{4}+\frac{1}{4}-\frac{q}{2q-p}+\left(\frac{q}{2q-p}\right)^2}$$

この辺りの
計算は、
面倒な方法を
採用してしまうと
答えが出なく
なります。

∴ $AS^2 = SM^2$ から、

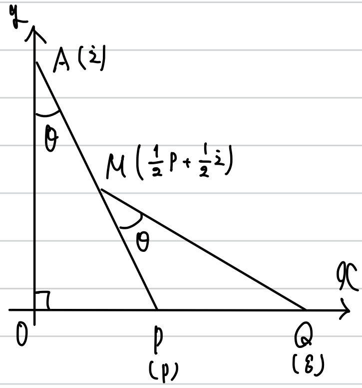
$$1-\frac{2q}{2q-p}+\cancel{\left(\frac{q}{2q-p}\right)^2} = \frac{p^2}{4}+\frac{1}{4}-\frac{q}{2q-p}+\cancel{\left(\frac{q}{2q-p}\right)^2}$$

$$\frac{-q}{2q-p} = \frac{p^2-3}{4}$$

$$-4q = (p^2-3)(2q-p)$$
$$= 2(p^2-3)q - p(p^2-3)$$
$$p(p^2-3) = (2p^2-2)q$$
$$\therefore\ q = \frac{p(p^2-3)}{2(p^2-1)}$$

解法4　複素数平面

与えられた点や直線を
複素数平面に載せる。



∠OAP = ∠PMQ より

$$\arg\left(\frac{p-i}{0-i}\right) = \arg\left(\frac{q-\left(\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}i\right)}{p-\left(\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}i\right)}\right)$$

$$\frac{p-i}{0-i}\times\frac{p-\left(\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}i\right)}{q-\left(\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}i\right)} = (\text{実数})$$

$$\frac{p-i\ \times i}{-i\ \times i}\times\frac{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}i}{\left(q-\frac{1}{2}p\right)-\frac{1}{2}i} = (\text{実数})$$

分子が実数に
なれば良い

$$(1+pi)\times\frac{\cancel{2}\times\left(\frac{1}{\cancel{2}}p-\frac{1}{\cancel{2}}i\right)\times\left\{\left(q-\frac{1}{2}p\right)+\frac{1}{2}i\right\}}{2\times\left\{\left(q-\frac{1}{2}p\right)-\frac{1}{2}i\right\}\times\left\{\left(q-\frac{1}{2}p\right)+\frac{1}{2}i\right\}} = (\text{実数})$$

分母は実数

$$(1+pi)\times\left\{p\left(q-\frac{1}{2}p\right)+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}p-q+\frac{1}{2}p\right)i\right\} = (\text{実数})$$

$$(1+pi)\times\left\{\left(pq-\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}\right)+(p-q)i\right\} = (\text{実数})$$

$$\underbrace{pq-\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}-p(p-q)}_{\text{実部}}+\underbrace{\left\{(p-q)+p\left(pq-\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}\right)\right\}}_{\text{虚部}}i = (\text{実数})$$

ココが0になれば良い

$$p-q+p^2q-\frac{1}{2}p^3+\frac{1}{2}p = 0$$
$$q(p^2-1) = \frac{1}{2}p^3-\frac{3}{2}p \qquad q = \frac{p^3-3p}{2(p^2-1)}$$

2024年　東大数学　文系第3問③

(2)

(1)より $q=\dfrac{p^3-3p}{2(p^2-1)}$ で $q=\dfrac{1}{3}$ となる。

$$\frac{p^3-3p}{2(p^2-1)}=\frac{1}{3}$$

$$3p^3-9p=2p^2-2$$

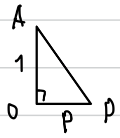
$$3p^3-2p^2+9p+2=0$$ $p=2$ を代入すると成立

$$(p-2)(3p^2+4p-1)=0$$

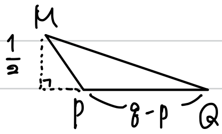
$\therefore\ p=2,\ \dfrac{-2\pm\sqrt{7}}{3}$　$0<p<1$ なので $\underline{p=\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}}$ //

(3)

$S=\triangle OAP=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot p=\dfrac{1}{2}p$



$T=\dfrac{1}{2}\cdot(q-p)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}(q-p)$



$S>T$ より

$$\frac{1}{2}p>\frac{1}{4}(q-p)$$

$$2p>q-p$$

$$3p>q$$

(1)より $q=\dfrac{p^3-3p}{2(p^2-1)}$ なので

$$3p>\frac{p^3-3p}{2(p^2-1)}$$ $0<p<1$ より $p^2-1<0$

$$6p(p^2-1)<p^3-3p$$

$$5p^3-3p<0$$ $p\neq 0$

$$-\sqrt{\frac{3}{5}}<p<\sqrt{\frac{3}{5}}$$

$0<p<1$ より $\underline{0<p<\sqrt{\dfrac{3}{5}}}$ //

$$\left(0<p<\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$$